Formule de analiză matematică

Asimptote

- **Asimptote orizontale**

Pentru a studia existenţa asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul unei funcţii se calculează $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Cazul 1. Dacă această limită nu există sau este infinită atunci graficul nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Cazul 2. Dacă această limită există şi este finită,egală cu un număr real ℓ,atunci graficul are asimptotă orizontală spre $+\infty$ dreapta de ecuaţie y= ℓ.

Analog se studiază existenţa asimptotei orizontale spre $-\infty$

- **Asimptote oblice**

Asimptota oblică spre $+\infty$ (dacă există) are ecuaţia y=mx+n unde m şi n se calculează cu formulele:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - m\cdot x \right]$$

Analog se studiază existenţa asimptotei oblice spre $-\infty$

- **Asimptote verticale**

Se calculează $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$.

Dacă una din aceste limite este infinită atunci graficul are asimptotă verticală dreapta de ecuaţie $x = x_0$.

Derivata unei funcţii intr-un punct:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tangenta la graficul unei funcţii in punctul de abscisă x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Reguli de derivare:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f-g)' = f' - g'$$
$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Tabel cu derivatele unor funcţii uzuale / **Tabel cu derivatele funcţiilor compuse**

$c' = 0$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(u^2)' = 2u \cdot u'$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$x' = 1$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(u^3)' = 3u^2 \cdot u'$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
$(x^2)' = 2x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(u^4)' = 4u^3 \cdot u'$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(x^3)' = 3x^2$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(x^4)' = 4x^3$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(e^{-u})' = -e^{-u} \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$
$(e^{-x})' = -e^{-x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$		$(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$			

Tabel cu integrale nedefinite

$\int 1dx = x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Formula de integrare prin părţi pentru integrale nedefinite este:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Formula de integrare prin părţi pentru integrale definite este:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Aplicaţii ale integralei definite

- **Aria subgraficului unei funcţii**
  Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pozitivă atunci avem:
  $$A(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$$
- **Volumul unui corp de rotaţie**
  Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă atunci avem:
  $$V(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$\int u'(x)dx = u(x) + C$	$\int \sin u(x) \cdot u'(x)dx = -\cos u(x) + C$
$\int u(x) \cdot u'(x)dx = \frac{u^2(x)}{2} + C$	$\int \cos u(x) \cdot u'(x)dx = \sin u(x) + C$
$\int u^2(x) \cdot u'(x)dx = \frac{u^3(x)}{3} + C$	$\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} dx = tgu(x) + C$
$\int u^3(x) \cdot u'(x)dx = \frac{u^4(x)}{4} + C$	$\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)} dx = -ctgu(x) + C$
	$\int \frac{u'(x)}{u^2(x) + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{u(x)}{a} + C$
$\int u^n(x) \cdot u'(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C$	$\int \frac{u'(x)}{u^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{u(x) - a}{u(x) + a} \right\| + C$
$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln \|u(x)\| + C$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) + a^2}} dx = \ln\left(u(x) + \sqrt{u^2(x) + a^2}\right) + C$
$\int e^{u(x)} u'(x)dx = e^{u(x)} + C$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - a^2}} dx = \ln \left\| u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2} \right\| + C$
$\int e^{-u(x)} u'(x)dx = -e^{-u(x)} + C$	
$\int a^{u(x)} u'(x)dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}} dx = \arcsin \frac{u(x)}{a} + C$