

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $z = (1 - i\sqrt{2})(1 + i\sqrt{2})$ este natural, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că $f(x) + f(1-x) = 7$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 5^{-x} = 2$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A , care îl conțin pe 1.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-4, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul M și este perpendiculară pe dreapta OM .
- 5p** 6. Triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\sin B = \cos B$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea $A = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 9}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 2020 = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3 - 1)(y^3 - 1)} + 1$, pentru orice $x, y \in A$.
- 5p** c) Determinați $x \in A$ pentru care $x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x}$.

- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\frac{1}{x-2} > \ln \frac{x}{x-1}$, pentru orice $x \in (2, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (x^3+1) f^2(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \ln 2$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$. Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$