

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + i$ și $z_2 = 3 - i$. Arătați că numărul $z_1 z_2$ este real.
- 5p 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(1, 1)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 + 2x - 4} = x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ și $B(2, a)$. Determinați numărul real a , știind că punctele O , A și B sunt coliniare.
- 5p 6. Se consideră $E(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 4$.
- 5p b) Determinați numărul real a , știind că $A(1) + A(3) = aA(2)$.
- 5p c) Arătați că $A(x)A(y) = 2A(x+y) + xyI_2$, pentru orice numere reale x și y , unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.
- 5p a) Arătați că $2 * (-2) = -2$.
- 5p b) Arătați că $x * y = 3(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = (x+2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $[-3, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)f(x)dx = 0$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.
- 5p c) Determinați numărul real m , $m > 0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=m$, are aria egală cu $\ln 2$.