

**Examenul național de bacalaureat 2023**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$z_1^2 + 4z_2 = (1 + 2i)^2 + 4(1 - i) = 1 + 4i + 4i^2 + 4 - 4i =$ $= 5 + 4 \cdot (-1) = 5 - 4 = 1$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + m - 1 = 0$ $\Delta = 0$ și, cum $\Delta = 8 - 4m$ , obținem $8 - 4m = 0$ , deci $m = 2$	2p 3p
3.	$\lg(x^2 + 9) = \lg(10x^2) \Rightarrow x^2 + 9 = 10x^2$ , de unde obținem $x^2 - 1 = 0$ $x = -1$ , care nu convine; $x = 1$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile Numerele din mulțimea $A$ , divizibile cu 9, sunt $9 \cdot 0, 9 \cdot 1, 9 \cdot 2, \dots, 9 \cdot 11$ , deci sunt 12 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$	2p 3p
5.	$\overline{MD} = \overline{MA} + \overline{AD}$ și $\overline{ME} = \overline{MC} + \overline{CB} + \overline{BE}$ $\overline{MD} + \overline{ME} = \overline{MA} + \overline{MC} + \overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CB} = \vec{0} + \vec{0} + \overline{CB} = \overline{CB}$	2p 3p
6.	$2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x - \cos x) = 0$ Cum $x \in [0, \pi]$ , obținem $x = \frac{\pi}{2}$ sau $x = \frac{\pi}{4}$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 0 =$ $= 0 - 2 + 4 - 0 - 1 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$\det(A(a)) = (a - 1)^2$ , pentru orice număr real $a$ $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ , deci sistemul are soluție unică pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	3p 2p
c)	Pentru $a = 1$ , soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha, 2 - \alpha, -2)$ , unde $\alpha \in \mathbb{C}$ Cum $\alpha$ este număr întreg și $\alpha > 2 - \alpha > -2$ , obținem $\alpha = 2$ sau $\alpha = 3$ , deci soluțiile sunt $(2, 0, -2)$ și $(3, -1, -2)$	2p 3p

<b>2.a)</b>	$1 * \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{(1-1^2) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{\frac{1}{2}}{1 + \sqrt{0}} = \frac{1}{2}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * (-x) = \frac{-x^2}{1 +  1-x^2 } = \frac{-x^2}{2-x^2}, \text{ pentru orice } x \in M$	<b>3p</b>
	$(x * (-x)) + x^2 = \frac{x^2(1-x^2)}{2-x^2} \geq 0, \text{ deci } x * (-x) \geq -x^2, \text{ pentru orice } x \in M$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$a * b = 1 \Rightarrow \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = ab - 1, \text{ deci } ab \geq 1$	<b>3p</b>
	Cum $a, b \in M$ , obținem $ab = 1$ , deci perechile sunt $(-1, -1)$ și $(1, 1)$ , care convin	<b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + x^2} \cdot (e^x + 2x) =$	<b>3p</b>
	$= \frac{x^2 - 2x}{e^x + x^2} = \frac{x(x-2)}{e^x + x^2}, x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0$	<b>3p</b>
	$\frac{a(a-2)}{e^a + a^2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ sau } a = 2$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	Pentru orice $x \in (-\infty, 0]$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $(-\infty, 0]$ ; pentru orice $x \in [0, 2]$ , $f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[0, 2]$ ; pentru orice $x \in [2, +\infty)$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[2, +\infty)$	<b>2p</b>
	Cum $f$ este continuă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , $f(0) = -1$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ , imaginea funcției $f$ este $(-\infty, -1]$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^3 f(x) \sqrt{x+3} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^3 =$	<b>3p</b>
	$= 9 + 3 = 12$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = \int_{-2}^1 \frac{(x+3)'}{\sqrt{x+3}} dx = 2\sqrt{x+3} \Big _{-2}^1 =$	<b>3p</b>
	$= 4 - 2 = 2$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\frac{1}{f(x)} = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2 + 1} \leq \frac{2}{x^2 + 1}, \text{ pentru orice } x \in [0, 1], \text{ de unde obținem } \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx =$	<b>3p</b>
	$= 2 \arctg x \Big _0^1 = \frac{\pi}{2}$	<b>2p</b>